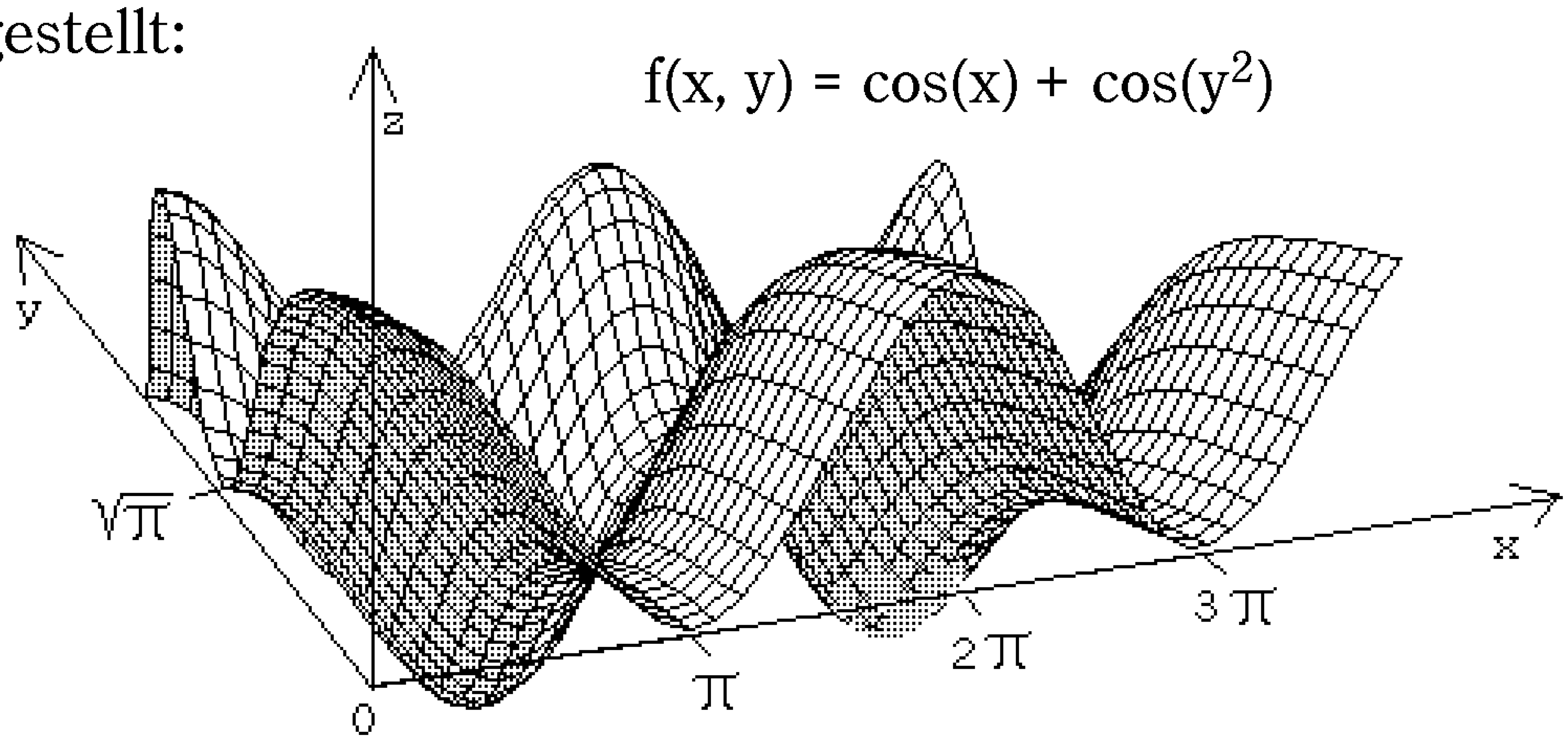
7.3 Extremwerte von Funktionen mit mehreren Variablen

Wenn in der Ökonomie Extremwerte von Funktionen mit mehreren Variablen bestimmt werden sollen, so liegen meistens Nebenbedingungen vor, und die Lösung der Aufgaben kann dann mittels des Lagrange-Ansatzes erfolgen. Nachfolgend wird besprochen, wie Extremwerte zu bestimmen sind, wenn keine Nebenbedingungen vorliegen.

Nachfolgend sei eine Funktion mit zwei Variablen betrachtet. Zunächst wird nochmal die bereits zu Beginn des Kapitels betrachtete Funktion dargestellt:



Als Verallgemeinerung der notwendigen Bedingung für Extremwerte läßt sich hier feststellen, daß sowohl die erste Ableitung in x-Richtung als auch die in y-Richtung Null sein müssen. Denn wenn diese nicht beide Null wären, so würde es immer noch eine Richtung geben, wo es nach oben (bzw. unten) geht, und somit würde es sich um keinen Hochpunkt (bzw. Tiefpunkt) handeln. Es müssen also alle partiellen Ableitungen der Funktion Null sein. Die notwendige Bedingung für ein Extremum ist somit gleichbedeutend damit, daß der Gradient der Funktion Null ist.

An nachfolgendem Beispiel wird das Verfahren zur Bestimmung der Extremwerte demonstriert:

Bestimmen und klassifizieren Sie die Extrema der Funktion

$$f: (x; y) \to \frac{1}{3} x^3 - x^2 + y^3 - 12y.$$

Diese Funktion hängt von zwei Variablen ab. Extremwerte kann sie nur haben, wenn ihre partiellen Ableitungen in Richtung der beiden Variablen gleichzeitig Null sind:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = 2 \vee y = -2$$

An den folgenden 4 Punkten hat die Funktion also eine waagerechte Tangentialebene:

$$(0; 2)\ (0; -2)\ (2; 2)\ (2; -2)$$

Allerdings muß es sich bei diesen Punkten nicht um Extremwerte handeln, denn genauso wie bei eindimensionalen Funktionen kann es auch hier Sattelpunkte geben. Zur Überprüfung, ob es sich um einen Extremwert handelt, kann man auch hier wieder die "zweite Ableitung" verwenden, nur daß es hier mehrere zweite Ableitungen gibt.

Zum einen kann die Funktion zweimal nach x oder zweimal nach y abgeleitet werden. Die Funktion kann aber auch zunächst nach x und dann nach y oder zunächst nach y und dann nach x abgeleitet werden. Insgesamt ergeben sich die folgenden 4 Möglichkeiten:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$

Bei fast allen Funktionen (wenn diese zweimal stetig differenzierbar sind) gilt, daß die gemischten Ableitungen identisch sind:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$$

Sind diese gemischten Ableitungen Null, so ist die Klassifizierung relativ einfach. Wenn die Funktion nun in x- und in y-Richtung einen Hochpunkt hat, also die zweite Ableitung nach x und nach y negativ ist, so hat die gesamte Funktion einen Hochpunkt. Hat die Funktion in eine Richtung einen Hochpunkt und in die andere einen Tiefpunkt, so handelt es sich um einen Sattelpunkt (an einer solchen Stelle sieht die Funktion wie ein Pferdesattel aus). Ist die zweite Ableitung in eine Richtung Null, so muß entsprechend den Regeln für Sattelpunkte bei einer Funktion einer Variablen weiter untersucht werden. Wenn sich in eine Richtung ein Sattelpunkt ergibt, so hat natürlich auch die ganze Funktion einen Sattelpunkt.

In dem betrachteten Beispiel sind die gemischten Ableitungen Null:

$\frac{\partial f}{\partial x} = x^2 - 2x$ diese Funktion muß nun noch nach y abgeleitet werden:

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 0$$

Für die zweite Ableitung nach x und nach y ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x - 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

An den 4 Stellen, wo die ersten Ableitungen Null sind, muß nun in die zweiten Ableitungen eingesetzt werden:

$$(0; 2) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2*0 - 2 = -2 < 0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6*2 = 12 > 0$$

In x-Richtung liegt also ein Hochpunkt vor, während es sich in y-Richtung um einen Tiefpunkt handelt. Demnach hat die gesamte Funktion einen Sattelpunkt.

$$(0; -2) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 < 0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}$$

$$(2; 2) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12 > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}$$

$$(2; -2) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12 < 0 \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

Hier sei noch einmal betont, daß das zuvor präsentierte Verfahren nur gestattet ist, wenn die gemischten Ableitungen Null sind. Andernfalls muß ein komplizierteres Verfahren angewendet werden. Es muß die Matrix der zweiten partiellen Ableitungen gebildet werden. Diese Matrix nennt man auch **Hessesche-Matrix** (oder auch kürzer Hesse-Matrix). Für eine Funktion mit zwei Variablen sieht sie folgendermaßen aus:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Da die gemischten Ableitungen identisch sind, ist diese Matrix symmetrisch.

Angenommen, es sei folgende Funktion auf Extrema zu untersuchen:

$$f(x, y) = x * y - 0{,}1x^2 - y^2 - 0{,}6x$$

Für die Ableitungen ergibt sich:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - 0{,}2x - 0{,}6 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y$$

Indem für x entsprechend der zweiten Gleichung eingesetzt wird, ergibt sich aus der ersten Gleichung:

$$y - 0{,}2(2y) - 0{,}6 = 0 \Leftrightarrow 0{,}6y - 0{,}6 = 0 \Leftrightarrow y = 1$$

Aus der zweiten Gleichung folgt nun $x = 2 * 1 = 2$

Mögliche Extrema liegen also bei (2, 1).

Für die zweiten Ableitungen ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = 1 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -0{,}2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2$$

Da die gemischten Ableitungen nicht verschwinden, muß die Hessesche Matrix gebildet werden. Diese lautet:

$$H = \begin{pmatrix} -0{,}2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Es gilt folgendes:

Ist die Hessesche Matrix

- positiv definit, so handelt es sich um ein isoliertes Minimum
- negativ definit, so handelt es sich um ein isoliertes Maximum
- indefinit, so handelt es sich um kein lokales Extremum

Nach dem **Hurwitz Kriterium** ist eine symmetrische Matrix genau dann positiv definit, wenn ihre Determinante und alle durch sukzessives Streichen der letzten Zeile und Spalte entstehenden Determinanten positiv (>0) sind. Diese Determinanten nennt man auch **Hauptminoren**. Für eine (3, 3) Matrix ergeben sich folgende Hauptminoren:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ und } \det(a_{11})$$

Für die letztgenannte Determinante gilt gerade: $\det(a_{11}) = a_{11}$

Eine Matrix ist also genau dann positiv definit, wenn alle Hauptminoren positiv (>0) sind.

Negativ definit ist eine symmetrische Matrix H, wenn die Matrix −H positiv definit ist. Mittels der Rechenregeln für Determinanten kann man